

# سخت افزار

جلسه سوم

جبر بول



## مقدمه

جبر بول نیز همانند جبر دهمی معمولی بوسیله مجموعه ای از عناصر (مانند  $S$ )، تعدادی عملگر و تعدادی اصول بدیهی تعریف می شود.

مهمترین این اصول عبارت است از:

**1- خاصیت بسته بودن:** مجموعه  $S$  نسبت به یک عملگر بسته است اگر برای هر دو عنصر  $s$ ، عملگر مذکور عنصر منحصر بفردی از مجموعه را منتسب نماید.  
مثال مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عملگر  $+$  بسته است زیرا اگر  $a, b$  دو عضو دلخواه  $N$  باشد عنصر دیگری از این مجموعه مثل  $c$  می توان یافت بنحوی که  $a+b=c$  باشد.

مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عملگر  $-$  بسته نیست زیرا بعنوان مثال

$$2-4=-2 \notin N$$



**2- خاصیت شرکت پذیری:** یک عملگر  $*$  روی مجموعه  $S$  شرکت پذیر است هر گاه داشته باشیم

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

$$x * y = y * x$$

**3- اصل جابجایی:**

**4- عنصر خنثی:** مجموعه  $S$  نسبت به عملگر  $*$  دارای عنصر خنثی  $e$  است اگر این عنصر متعلق به  $S$  بوده و دارای خاصیت زیر باشد.

$$e * x = x * e = x$$



**5- معکوس:** مجموعه  $S$  با عنصر خنثی  $e$  نسبت به عملگر  $*$  دارای معکوس است بشرطی که برای هر  $x$  عضو  $S$ ، عنصری مانند  $y$  عضو  $S$  وجود داشته باشد بطوری که

$$x * y = e$$

**6- اصل توزیع پذیری:** اگر  $*$  و  $+$  دو عملگر روی مجموعه باشند  $(*)$  را روی  $(+)$  توزیع پذیر گوئیم هرگاه:

$$x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$$



## (جبر بول):

جبر بول مشابه جبر معمولی با عناصر مجموعه  $B=\{0,1\}$  همراه با دو عملگر  $OR(+)$  و  $AND(.)$  تعریف شده و دارای اصول زیر است :

(1)

a: مجموعه نسبت به عملگر  $(+)$  بسته باشد

b: مجموعه نسبت به عملگر  $(.)$  بسته باشد

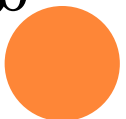
(2)

$$x+0=0+x=x$$

a: عنصر خنثی برای  $(+)$  برابر 0 باشد یعنی:

$$x.1=1.x=x$$

b: عنصر خنثی برای  $(.)$  برابر 1 باشد یعنی:



(3)

a: مجموعه نسبت به (+) دارای خاصیت جابجایی باشد.  $x+y=y+x$

b: مجموعه نسبت به (.) دارای خاصیت جابجایی باشد.  $x.y=y.x$

(4)

a: (.) روی (+) دارای خاصیت پخشی باشد:  $x.(y+z)=(x.y)+(x.z)$

b: (+) روی (.) دارای خاصیت پخشی باشد:  $x+(y.z)=(x+y).(x+z)$

(5) به ازای هر عنصر  $x$ ، عنصری مانند  $x'$  وجود داشته باشد بگونه ای که:

$$x+x'=1 \quad :a$$

$$x.x'=0 \quad :b$$



- 1)  $x.0=0$
- 2)  $x.1=x$
- 3)  $x+0=x$
- 4)  $x+1=1$
- 5)  $x+x'=1$
- 6)  $x+x=x$
- 7)  $x.x'=0$
- 8)  $x.x=x$
- 9)  $x+y=y+x$
- 10)  $xy=yx$
- 11)  $(x+y)+z = x + (y+z)$
- 12)  $(xy)z = x(yz)$
- 13)  $x(y+z)=(x.y)+(x.z)$
- 14)  $x+y.z=(x+y).(x+z)$
- 15)  $x+xy=x$
- 16)  $(x')'=x$





یک تابع بول عبارتی است که از متغیرهای دودویی ، عملگرهای OR,AND,NOT و پرانتزها و علامت تساوی تشکیل شده است. به ازای مقادیر مفروض از متغیرها تابع فقط می تواند 0 یا 1 باشد.

مثال:

$$F = x + y'z$$



## جدول درستی

یکی از روش های بیان توابع بولی و اثبات قوانین استفاده از جدول درستی است.

تعداد سطرهای جدول درستی بستگی به تعداد متغیرهای تابع دارد.

برای یک تابع  $n$  متغیره جدول درستی دارای  $2^n$  ردیف (سطر) است .

ممکن است جدول درستی داده شود و شما باید تابع آن را به دست آورید و بالعکس.



مثال:

درستی  $x = x + xy$  را با جدول صحت بررسی کنید:

حل)

| x | y | xy | $x + xy$ |
|---|---|----|----------|
| 0 | 0 | 0  | 0        |
| 0 | 1 | 0  | 0        |
| 1 | 0 | 0  | 1        |
| 1 | 1 | 1  | 1        |



مثال:

با جدول درستی ثابت کنید؟

$$x+yz=(x+y)(x+z)$$

حل)

| x | y | z | yz | x+yz | x+y | x+z | (x+y)(x+z) |
|---|---|---|----|------|-----|-----|------------|
| 0 | 0 | 0 | 0  | 0    | 0   | 0   | 0          |
| 0 | 0 | 1 | 0  | 0    | 0   | 1   | 0          |
| 0 | 1 | 0 | 0  | 0    | 1   | 0   | 0          |
| 0 | 1 | 1 | 1  | 1    | 1   | 1   | 1          |
| 1 | 0 | 0 | 0  | 1    | 1   | 1   | 1          |
| 1 | 0 | 1 | 0  | 1    | 1   | 1   | 1          |
| 1 | 1 | 0 | 0  | 1    | 1   | 1   | 1          |
| 1 | 1 | 1 | 1  | 1    | 1   | 1   | 1          |



(مثال)

توابع بولی زیر را با استفاده از جبر بول ساده کنید ؟

(مثال 1)

$$x(x' + y) =$$

$$= xx' + xy = 0 + xy = xy$$



مثال 2

$$x + x'y =$$

$$= (x + x')(x + y) = 1(x + y) = x + y$$



مثال 3

$$(x + y) (x + y') =$$

$$= xx + xy + xy' + yy'$$

$$= x + xy + xy' + 0$$

$$= x (1 + y + y')$$

$$= x(1) = x$$



4 مثال)

$$xy + x'z + yz =$$

$$= xy + x'z + yz (x + x')$$

$$= xy + x'z + xyz + x'yz$$

$$= xy (1 + z) + x'z (1 + y)$$

$$= xy + x'z$$





## تئوری دمورگان :

$$1) \quad (x.y.....d)' = x' + y' + ..... + d'$$

$$2) \quad (x+y+.....+d)' = x'y'.....d'$$



مثال)

متمم توابع زیر را بیابید؟

1)  $F = x'yz' + x'y'z \longrightarrow$

$$\begin{aligned} F' &= (x'yz' + x'y'z)' = (x'yz')' \cdot (x'y'z)' \\ &= (x + y' + z) \cdot (x + y + z') \end{aligned}$$

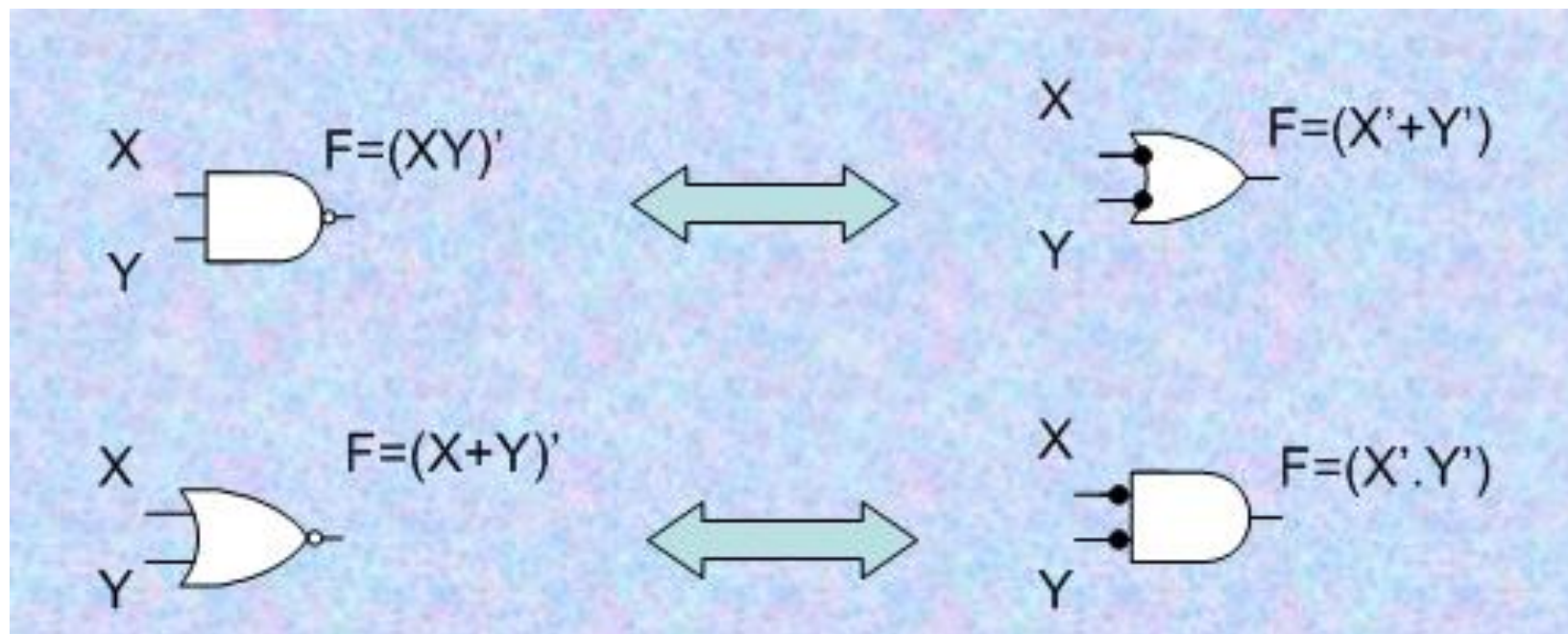


$$2) D = x(y'z' + yz)$$

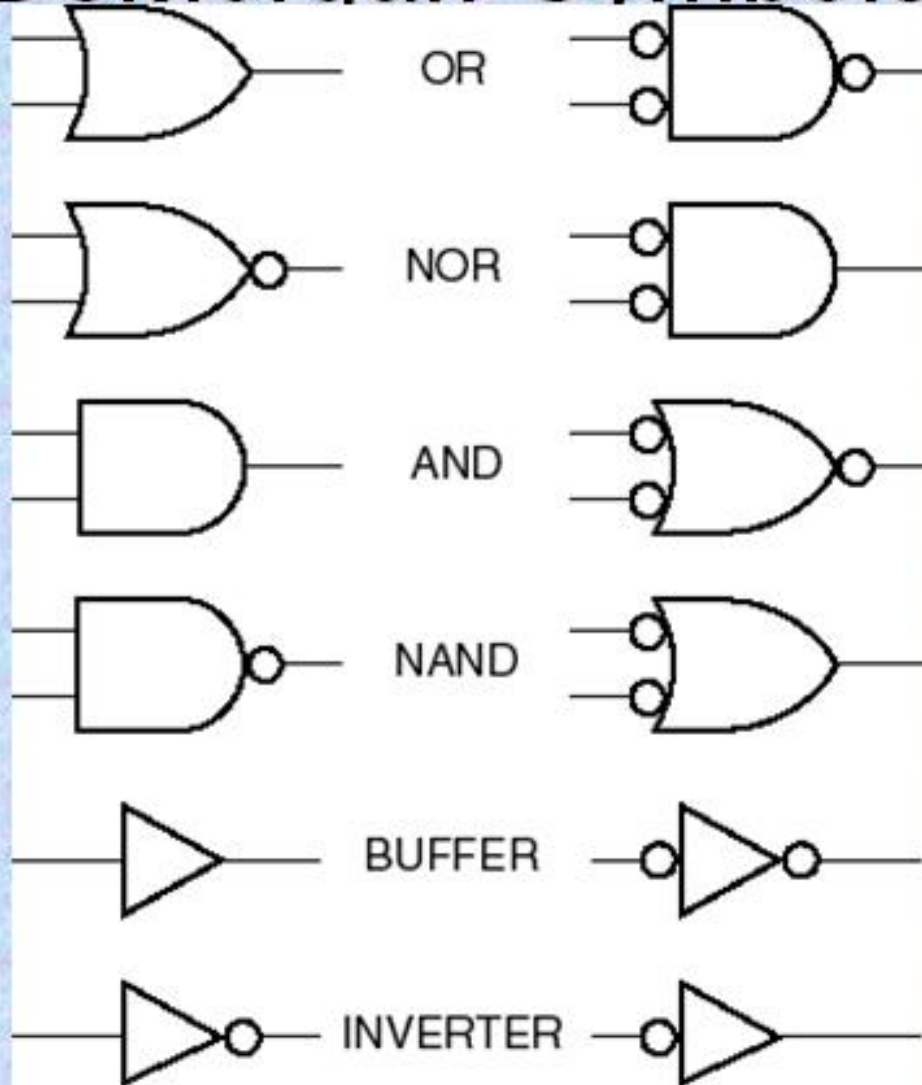
$$\begin{aligned} D' &= [x(y'z' + yz)]' = x' + (y'z' + yz)' \\ &= x' + (y'z')' \cdot (yz)' \\ &= x' + (y + z) \cdot (y' + z') \end{aligned}$$



## تبدیل گیت ها با استفاده از تئوری دمرگان



# DeMorgan Symbols



## فرمهای استاندارد (Standard Forms)

### □ Literals :

به یک متغیر در فرم خود یا بفرم مکمل گفته می شود. مثال:  $x, x', y, y'$

### □ جمله ضربی (Product Term) :

یک لیترال یا AND چند لیترال است. مثال:  $x, xyz', A'B, AB$

### □ جمله جمعی (Sum Term) :

یک لیترال یا OR چند لیترال است. مثال:  $x, x+y+z', A'+B, A+B$

### □ دو فرم استاندارد :

Sum-of-Products and Product-of-Sums

## جملات ماکسترم و مینترم (Maxterm , minterm):

□ هر مینترم با and کردن n متغیر بدست می آید. هر متغیر در آن با مقدار صفر با علامت پریم و با مقدار 1 بدون پریم نمایش داده خواهد شد.

مینترم بصورت  $m_j$  نمایش می دهند که j معادل دهمی جمله مربوطه است  
مثلا:

$$m_3 = x'yz$$

0 1 1

ماکسترم : از OR کردن n متغیر بدست می آید. هر متغیر با مقدار صفر بدون پریم و با مقدار یک با پریم نمایش داده می شود:

$$M_0 = (x+y+z)$$

0 0 0



## جدول درستی مینترم و ماکسترم:

| X | Y | Z | minterm        | Maxterm          |
|---|---|---|----------------|------------------|
| 0 | 0 | 0 | $m_0 = x'y'z'$ | $M_0 = X+Y+Z$    |
| 0 | 0 | 1 | $m_1 = x'y'z$  | $M_1 = X+Y+Z'$   |
| 0 | 1 | 0 | $m_2 = x'yz'$  | $M_2 = X+Y'+Z$   |
| 0 | 1 | 1 | $m_3 = x'yz$   | $M_3 = X+Y'+Z'$  |
| 1 | 0 | 0 | $m_4 = xy'z'$  | $M_4 = X'+Y+Z$   |
| 1 | 0 | 1 | $m_5 = xy'z$   | $M_5 = X'+Y+Z'$  |
| 1 | 1 | 0 | $m_6 = xyz'$   | $M_6 = X'+Y'+Z$  |
| 1 | 1 | 1 | $m_7 = xyz$    | $M_7 = X'+Y'+Z'$ |



(1) هر تابع بولی را می توان به صورت جمع مینترم ها (Sum Of Product=SOP) نوشت:

$$\begin{aligned} F1 &= m0 + m1 + m2 + m3 + m4 + m5 + m6 + m7 \\ &= \Sigma(0,1,2,3,4,5,6,7) = SOP \end{aligned}$$

(2) هر تابع بولی را می توان به صورت حاصلضرب ماکسترم ها (Product of Sum=POS) نوشت:

$$\begin{aligned} F1 &= M0.M1.M2.M3.M4.M6.M7 \\ &= \Pi(0,1,2,3,4,5,6,7) = POS \end{aligned}$$



مثال) توابع  $F1$  و  $F2$  را بر حسب مجموع مینترم ها و حاصلضرب ماکسترم ها بدست آورید؟

| X | Y | Z | F1 | F2 |
|---|---|---|----|----|
| 0 | 0 | 0 | 1  | 0  |
| 0 | 0 | 1 | 0  | 0  |
| 0 | 1 | 0 | 1  | 0  |
| 0 | 1 | 1 | 0  | 1  |
| 1 | 0 | 0 | 0  | 0  |
| 1 | 0 | 1 | 1  | 1  |
| 1 | 1 | 0 | 1  | 1  |
| 1 | 1 | 1 | 0  | 1  |



F1 و F2 بر حسب مجموع مینترم ها

$$F1(X,Y,Z)=X'Y'Z'+X'YZ'+XY'Z+XYZ'$$

$$=\sum(0,2,5,6)=m_0+m_2+m_5+m_6$$

$$F2(X,Y,Z)=X'YZ+XY'Z+XYZ'+XYZ$$

$$=\sum(3,5,6,7)=m_3+m_5+m_6+m_7$$



F1 و F2 بر حسب حاصلضرب ماکسترم ها

$$\begin{aligned} \mathbf{F1(x,y,z)} &= (x+y+z')(x+y'+z')(x'+y+z)(x'+y'+z') \\ &= M1.M3.M4.M7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F2(x ,y, z)} &= (x+y+z) (x+y+z')(x+y'+z)(x'+y+z) \\ &= M0.M1.M2.M4 \end{aligned}$$



## تکلیف

تابع  $F$  و  $\overline{F}$  را از روی جدول درستی زیر برحسب حاصل جمع مینترم ها ، حاصل ضرب ماکسترم ها بست آورید؟

| A | B | C | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |



□ هرگاه تابع بول به صورت مجموع مینترم ها یا حاصل ضرب ماکسترم ها بیان شود می گوئیم به فرم متعارف تبدیل شده است.

### تبدیل فرم های استاندارد

در هر جمله همه متغیر ها وجود دارد یا نه اگر هر تغییری نباشد با قرار دادن عباراتی نظیر  $X+X'$  آن متغیر را تولید می کنیم.

مثال

$$F=A+B'C$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) A=A(B+B')=AB+AB' \\ (1) A=(AB+AB')(C+C')=ABC+ABC'+AB'C+AB'C' \\ (2) B'C=B'C(A+A')=AB'C+A'B'C \end{array} \right.$$

$$F=ABC+ABC'+AB'C+AB'C'+AB'C+A'B'C$$

$$F=m_1+m_4+m_5+m_6+m_7$$



(مثال)

جدول درستی تابع  $F = A + \overline{B}C$  را بدست آورید؟

$A(BC)$

$A(B\overline{C})$

$A(\overline{B}C)$

$A(\overline{B}\overline{C})$

+

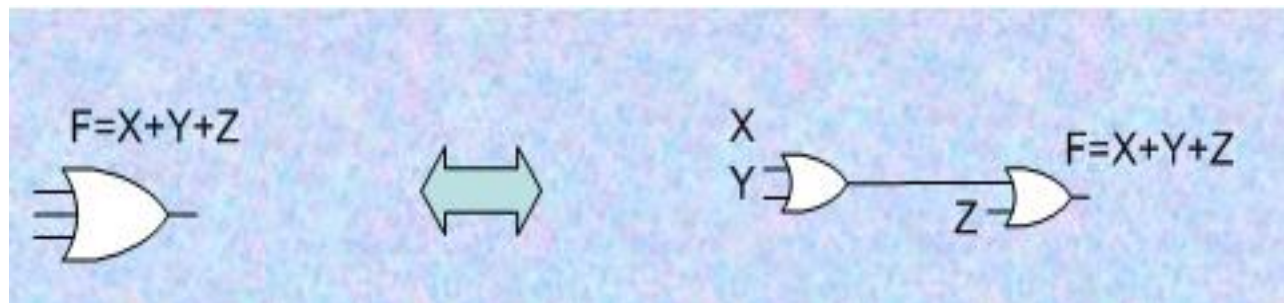
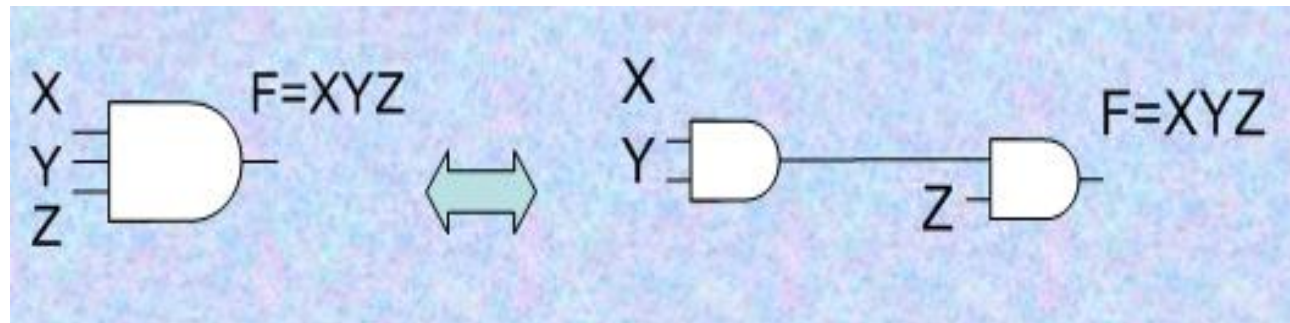
$(A)\overline{B}C$

$(\overline{A})\overline{B}C$

| A | B | C | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

## گیتهای چند ورودی :

چون AND و OR دارای خاصیت شرکت پذیری و جابجایی هستند پس توابع AND و OR قابل گسترش به 3 یا چند ورودی هستند .





## منطق مثبت و منفی

# Positive & Negative Logic

■ معمولاً در گیت های منطقی داریم:

❖ H (high voltage, 5V) = 1

❖ L (low voltage, 0V) = 0

■ این قرارداد منطق مثبت می باشد.

■ با این وجود قرار داد معکوس یعنی منطق مثبت نیز می تواند استفاده گردد.

❖ H (high voltage) = 0

❖ L (low voltage) = 1

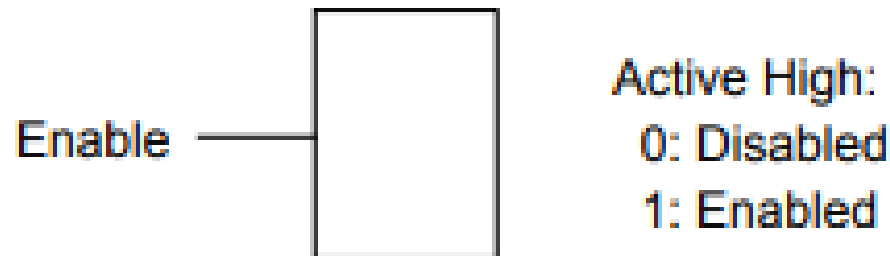
■ بسته به نوع منطق استفاده شده یک گیت ممکن است عبارت بولی متفاوتی را نمایش دهد.



منطق مثبت و منفی

## Positive & Negative Logic

Positive logic:



Negative logic:

